**Лекция 4. Управляемость линейных систем с краевыми**

 **условиями и ограниченным управлением**

Рассмотрим следующую задачу управляемости. Найти управление

 (1.60)

которое переводит траекторию системы

 (1.61)

Из начальной точки  в момент времени  в точку  т.е.

 (1.62)

где фиксированы, 

Решение указанной задачи может быть сведено к решению следующей оптимизационной задачи:

 (1.63)

при условиях

 (1.64)

 (1.65)

где заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества.

**Программное управление.** Отметим, что:

1. значение  для любых . Следовательно, функционал  ограничен снизу;
2. задача 3 имеет решение тогда и только тогда, когда значение  где решение оптимизационной задачи (1.63) – (1.65).
3. Если  то управление

 (1.66)

где



1. В случае , задача (1.60) – (1.62) не имеет решения.

**Теорема 8.** *Пусть матрица . Тогда функционал* (1.63) *при условиях* (1.64), (1.65) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*



*в любой точке  вычисляется по формуле*

 (1.67)

 (1.68)

 (1.69)

 (1.70)

*где , – решение дифференциального уравнения* (1.64)*, а функция  – решение сопряженной системы*

 (1.71)

*Кроме того, градиент  удовлетворяет условию Липшица*

 (1.72)

*где*   

**Доказательство.** Как в доказательстве теоремы 5, приращение функционала (1.63) можно представить в виде





 

Отсюда следуют соотношения (1.67)–(1.70), где – решение сопряженной системы (1.71). Для  верна оценка (1.38), оценку для  можно получить из (1.42) при 

Разность



где









где 

Нормы









Тогда

 (1.73)

 (1.74)

Обозначим через 

Тогда





Следовательно, существуют постоянные  такие, что

 (1.75)

 (1.76)

Из (1.73), (1.74) имеем

 (1.77)

 (1.78)

где (см. (1.44))



Из (1.75) – (1.78) следует



Отсюда следует оценка (1.72), где  Теорема доказана.

На основе соотношений (1.68) – (1.72) строим последовательности



по следующим правилам:

 (1.79)

где . В частности, при  имеем , где  – постоянная Липшица из (1.72).

**Лемма 2.** *Пусть  – ограниченные выпуклые замкнутые множества в   – ограниченное выпуклое замкнутое множество в  Тогда:*

1. *функционал  при условиях* (1.64), (1.65) *является выпуклым.*
2. *функционал  достигает нижней грани на множестве* 

**Доказательство.** Пусть



где . Отсюда следует, что . Следовательно, функция  является выпуклой функцией от . Далее, повторяя доказательство леммы 1, получим утверждения леммы. Лемма доказана.

**Теорема 9.** *Пусть матрица   – ограниченные выпуклые замкнутые множества, последовательности  определяются по формулам* (1.79)*. Тогда:*

1. *последовательность  является минимизирующей, т.е. *
2. *последовательность  слабо сходится к множеству , где    при *
3. *справедлива следующая оценка скорости сходимости*

*  *

1. *для того, чтобы задача*3 *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение *

**Доказательство.** Как в случае доказательства теоремы 6, из (1.79) получим

 (1.80)

 (1.81)

 (1.82)

 (1.83)

Из неравенств (1.80)–(1.83) следует

 (1.84)

Отсюда следует, что  при . Тогда  при . Из выпуклости функционала (1.63) при условиях (1.64), (1.65) имеем

 (1.85)

Из (1.84), (1.85) следует, что последовательность  является минимизирующей. Легко убедиться в том, что множество слабо бикомпактно, . Тогда  при .

Наконец, из (1.84), (1.85) можно получить оценку . Последнее утверждение следует из . В самом деле, если , то

 (1.86)

**Позиционное управление.** По известному программному управлению (1.86) можно найти позиционное управление для задачи (1.60)–(1.62).

**Теорема 10.** *Пусть выполнены условия теорем*8, 9*, и пусть, кроме того: , неособая матрица , определяется по формуле* (1.23)*, значение ,  . Тогда позиционное управление , где  – определяется по формуле* (1.86)*, функция*



**Проекция точки на множество.** Пусть точка , точки   – проекции точки  на множествах  соответственно.

1. , , где матрица  порядка . Пусть точка . Тогда :



;

1. 



1. 

 



 ;

1.  





**Оптимальное быстродействие.** Для решения задачи оптимального быстродействия необходимо найти наименьшее значение , при котором существует управление для задачи (1.60)–(1.62).

Пусть найдено решение задачи управляемости (1.63) – (1.65) для некоторого выбранного значения .

Определим значения  где , по следующему алгоритму. Выберем значение . По предложенному выше алгоритму решения оптимизационной задачи находим набор . Здесь возможны случаи: 1) значение  2) значение .

В первом случае, выберем значение , во втором случае  и.т.д.